



بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده علوم ریاضی  
گروه ریاضی محض

پایان نامه کارشناسی ارشد  
گرایش آنالیز ریاضی

عنوان

پیوستگی خودکار همریختی ها و مدول همریختی ها روی جبرهای  
باناخ و جبرهای توپولوژیک

پژوهشگر

حمید شایان پور

استاد راهنما

دکتر حمید شایان پور

استادان مشاور

دکتر حمید شایان پور و دکتر حمید شایان پور

مهر ۱۳۹۱

کلیه حقوق مادی حاصله از نتایج مطالعات، ابتکارات  
و نوآوری های ناشی از تحقیق موضوع این پایان نامه  
متعلق به دانشگاه شهرکرد است.

به پاس عاطفه سرشار و کرمای امید بخش وجودشان، که در این سردترین روزگار ان بهترین پشتیبان است،  
به پاس قلب های بزرگشان، که فریاد رس است و سرکردانی و ترس در پناهشان به شجاعت می گراید،  
و به پاس ایثار و محبت های بی دریغشان، که هرگز فروکش نمی کند،  
این مجموعه را به پدر و مادر و همسر عزیزم تقدیم می کنم.

اولین چکه ناودان بلندیک احساس را، در قالب کلامی از جنس تنفس باغچه‌های معصوم یاس، به روی حجم سپیدیک برکه  
می‌ریزم و آن را به لجه‌های همه‌ی پروانه‌صفت‌های این کیتی بی‌انتباه آستان نیلوفری دلهای زلال هدیه می‌کنم:

ای نردان پاک تو را سپاس می‌گویم،

که به حکمت بی‌انتهایت مرا یاری کردی،

و به رحمت نعمت‌هایت را بر من تمام کردی،

خانواده‌ای خوب به من عطا کردی که در هر حال پشتیبانی‌ام کنند و استادانی سرراهم نهادی تا دانش و علمشان را بی‌ریا در  
اختیارم بگذارند.

بر خود لازم می‌دانم از همه عزیزانی که در جهت به سرانجام رساندن این رساله مرا یاری نمودند، قدردانی نمایم. مراتب  
قدردانی و سپاس خود را از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای بزرگوارم جناب آقای دکتر طاهر قاسمی، هنری ابراز می‌نمایم. همچنین  
از استادان کرامت‌دار، دکتر اسماعیل انصاری، دکتر فرشته سعدی و دکتر حکیمه ماهیار، که داورانی این رساله را بر عهده داشتند،  
قدردانی می‌نمایم.

با آرزوی موفقیت برای تمام عزیزان

حمیدشایان پور

تیر ۱۳۸۹

# اظهار نامه

در این رساله کلیه مطالب بدون مرجع در فصل‌های دوم، سوم و چهارم اصیل (Original) هستند.  
ضمناً مقاله‌های

T. G. Honary and H. Shayanpour, Automatic continuity of  $n$ -homomorphisms  
between Banach algebras, Quaestiones Mathematicae, 33(2)(2010), 189-196.

و

T. G. Honary and H. Shayanpour, Automatic continuity of  $n$ -homomorphisms  
between topological algebras, Bulletin of the Australian Mathematical Society,  
submitted.

از فصل دوم و مقاله

T. G. Honary, M. Najafi Tavani and H. Shayanpour, Automatic continuity of  
 $n$ -homomorphisms on Fréchet algebras, Quaestiones Mathematicae, to appear.

از فصل سوم و مقاله

T. G. Honary and H. Shayanpour, Automatic continuity of module homomorphisms from  
Fréchet algebras, preprint.

از فصل چهارم استخراج شده‌اند.

## چکیده

برای عدد طبیعی  $n \geq 2$  یک نگاشت  $n$ -ضربی بین جبرهای باناخ  $A$  و  $B$ ، نگاشتی مانند  $\theta : A \rightarrow B$  است که به ازای هر  $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ ،  $\theta(a_1 a_2 \dots a_n) = \theta(a_1) \theta(a_2) \dots \theta(a_n)$ . هرگاه  $\theta$  یک نگاشت خطی و  $n$ -ضربی باشد آن را یک  $n$ -همریختی گوئیم. مفهوم  $n$ -همریختی تعمیمی از مفهوم همریختی است. در این رساله نتایجی در زمینه پیوستگی خودکار  $n$ -همریختی‌ها بین برخی جبرهای توپولوژیک، به خصوص جبرهای باناخ، به دست می‌آوریم که از آن جمله می‌توان به تعمیم قضیه جانسون برای  $n$ -همریختی‌های پوشا و قضیه ریکارت برای  $n$ -همریختی‌های با برد چگال اشاره کرد. همچنین قضیه‌هایی را که پارک و تروت در سال ۲۰۰۹ برای پیوستگی خودکار  $n$ -همریختی‌های  $*$ -پایا روی  $C^*$ -جبرها ثابت کرده‌اند، تعمیم داده و آنها را برای هر  $n$ -همریختی  $*$ -پایا روی  $lmc$ -جبرها ثابت می‌کنیم.

در ادامه نشان می‌دهیم هرگاه  $(A, \{p_r\})$  یک جبر فرشه منظم جابه‌جایی باشد آنگاه برای هر  $m \in \mathbb{N}$  که  $A / \ker p_m$  فضای  $A / \ker p_m$  یک  $Q$ -جبر فرشه است، که  $A_m$  تکمیل شده  $A / \ker p_m$  تحت نرم  $p'_m$  است، که به ازای هر  $x \in A$  با ضابطه  $p'_m(x + \ker p_m) = p_m(x)$  تعریف می‌شود و در آن  $\pi_m : A \rightarrow A / \ker p_m \subseteq A_m$  نگاشت خارج قسمتی است. همچنین نشان می‌دهیم، هرگاه  $(A, \{p_r\})$  یک جبر فرشه منظم جابه‌جایی باشد به طوری که از مرتبه‌ای به بعد در شرط  $\pi_m^{-1}(\text{Rad} A_m) \subseteq \ker p_m$  صدق کند و  $(B, \{q_r\})$  یک جبر فرشه نیم ساده جابه‌جایی باشد، آنگاه هر  $n$ -همریختی  $\theta : A \rightarrow B$  که از مرتبه‌ای به بعد در شرط  $\theta(\ker p_m) \subseteq \ker q_m$  صدق کند، پیوسته است.

در پایان وقتی  $A$  یک جبر فرشه باشد، پیوستگی خودکار  $A$ -مدول همریختی‌ها از یک  $A$ -مدول فرشه به توی یک  $A$ -مدول باناخ را مورد بررسی قرار می‌دهیم و ثابت می‌کنیم که هر جبر فرشه یک‌دار با دو نیم سازی مکرر یکه، پیوسته تابعی است.

رده بندی موضوعی ریاضی ۲۰۱۰: 46J05، 46K05، 46H40، 46H05

**کلمات کلیدی:** پیوستگی خودکار،  $n$ -همریختی، جبر توپولوژیک،  $lmc$ -جبر،  $Q$ -جبر، جبر فرشه، جبر فرشه منظم، نیم ساده، قوی نیم ساده، جبر تجزیه پذیر، مدول همریختی،  $n$ -برگشت،  $lmc$ -جبر،  $A$ -مدول فرشه، دو نیم سازی مکرر یکه،  $n$ -همریختی  $*$ -پایا.



# فهرست مطالب

۳	مقدمه
۶	فهرست نمادها
۸	۱ دستگاه اعداد مختلط
۸	۱.۱ اعداد مختلط . . . . .
۸	۲.۱ مقدمات توپولوژیکی اعداد و صفحه مختلط . . . . .
۹	۲ توابع تحلیلی
۹	۱.۲ حد و پیوستگی . . . . .
۱۰	۳ توابع مقدماتی
۱۰	۱.۳ توابع نمایی و لگاریتمی . . . . .
۱۱	۴ تبدیلات
۱۲	۵ انتگرال گیری در صفحه مختلط
۱۲	۱.۵ انتگرال توابع برداری از متغیر مختلط . . . . .
۱۲	۲.۵ مسیرها و انتگرال روی مسیرها . . . . .
۱۳	۶ سریها
۱۴	۷ ماندهها و قطبها
۱۴	۱.۷ مانده توابع مختلط و قضیه ماندهی کوشی . . . . .
۱۵	۸ کاربردهای ماندهها
۱۵	۱.۸ محاسبه انتگرالهای ناسره . . . . .

۱۶	آ توپولوژی‌های روی فضاهای اندازه‌ها و ارزیابی‌ها
۱۶	۱.آ توپولوژی مبهم روی فضای اندازه‌ها
۱۷	ب توپولوژی‌های روی فضاهای اندازه‌ها و ارزیابی‌ها
۱۷	۱.ب توپولوژی مبهم روی فضای اندازه‌ها
۱۸	پ توپولوژی‌های روی فضاهای اندازه‌ها و ارزیابی‌ها
۱۸	۱.پ توپولوژی مبهم روی فضای اندازه‌ها
۱۹	مراجع
۲۱	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی
۲۲	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی
۲۴	Abstract

## مقدمه

این رساله شامل چهار فصل است که در فصل اول برخی از تعریف‌ها و قضیه‌های مربوط به جبرهای توپولوژیک، به خصوص، جبرهای فرشه و باناخ را، که برای بیان مطالب فصل‌های بعدی مورد نیاز است، می‌آوریم و در ادامه مفهوم  $n$ -همریختی و ارتباط آن با مفهوم همریختی را بیان می‌کنیم. سپس مفهوم طیف و شعاع طیفی و جبرهای ساده، نیم ساده و قوی نیم ساده و بعضی از قضیه‌های مقدماتی، که در فصل‌های بعدی مورد نیاز است، بیان می‌کنیم. در انتها مفهوم حد تصویری و دونیم سازی مکرر یک و قضیه‌های مربوط به آنها را می‌آوریم و با توضیحاتی در مورد قضیه‌های اثبات شده در مباحث پیوستگی خودکار همریختی‌ها، فصل اول را به پایان می‌رسانیم.

نگاشت  $\theta : A \rightarrow B$  بین جبرهای  $A$  و  $B$  را  $n$ -ضربی گوئیم اگر به ازای هر  $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ ،  $\theta(a_1 a_2 \dots a_n) = \theta(a_1) \theta(a_2) \dots \theta(a_n)$  هرگاه  $\theta, n$ -ضربی و خطی باشد گوئیم  $\theta, n$ -همریختی است. در فصل دوم، پیوستگی خودکار  $n$ -همریختی‌ها بین جبرهای توپولوژیک را مورد بررسی قرار خواهیم داد. مفهوم  $n$ -همریختی برای جبرهای مختلط توسط حجازیان، میرزاویری و مصلحیان در [8] مورد مطالعه قرار گرفته است.

در سال ۱۹۶۷ جانسون<sup>۱</sup> ثابت کرد که اگر  $A$  و  $B$  جبرهای باناخ باشند، به طوری که  $B$  نیم ساده باشد، آنگاه هر همریختی پوشا از  $A$  به  $B$  به طور خودکار پیوسته است [۹].

این فصل مشتمل بر سه بخش است که در بخش اول با ذکر چند لم شرایط را برای اثبات قضیه جانسون در مورد  $n$ -همریختی فراهم کرده و نشان می‌دهیم هرگاه  $A$  و  $B$  دو جبر فرشه باشند به طوری که  $A, Q$  - جبر و  $B$  تجزیه‌پذیر و نیم ساده باشند، در این صورت هر  $n$ -همریختی پوشای  $\theta : A \rightarrow B$  به طور خودکار پیوسته است. در انتهای این بخش چند نتیجه از این قضیه را می‌آوریم و آنها را در حالت خاص که جبرها، جبرهای باناخ باشند، ثابت می‌کنیم و نشان می‌دهیم که حکم قضیه برای نگاشت‌های پاد  $n$ -همریختی نیز درست است. سرانجام نشان می‌دهیم که هر  $n$ -برگشت روی بعضی از جبرهای توپولوژیک پیوسته است. در سال ۱۹۵۰ ریکارت<sup>۱</sup> ثابت کرد که اگر  $A$  و  $B$  جبرهای باناخ باشند، به طوری که  $B$  قوی نیم ساده باشد، آنگاه هر همریختی با برد چگال از  $A$  به  $B$  به طور خودکار پیوسته است [6.18، ۱۰].

در بخش دوم نشان می‌دهیم قضیه ریکارت برای هر  $n$ -همریختی روی بعضی از جبرهای توپولوژیک برقرار است و ثابت می‌کنیم اگر  $A$  و  $B, Q$ -جبرهای فرشه باشند به طوری که  $B$

یکدار و قوی نیم ساده و  $\theta : A \rightarrow B$  یک  $n$ -همریختی با برد چگال باشد و ضمناً  $\theta(A)$  تجزیه پذیر باشد، آنگاه  $\theta$  به طور خودکار پیوسته است.

در بخش سوم، قضیه های ۲.۳ و ۳.۲ از مرجع [۹] را، که برای  $C^*$ -جبرها اثبات شده اند، تعمیم داده و نشان می دهیم اگر  $A$  یک  $Q$   $lmc$  \*-جبر توپولوژیک باشد که توپولوژی آن توسط یک خانواده از نیم نرم ها مانند  $\mathcal{P} = \{p_\alpha\}$  تولید شده، همچنین  $B$  یک  $C^*$   $lmc$ -جبر باشد که توپولوژی آن توسط یک خانواده از نیم نرم ها مانند  $\mathcal{Q} = \{q_\alpha\}$  تولید شده و  $\theta : A \rightarrow B$  یک  $n$ -همریختی \*-پایا باشد، آنگاه برای هر  $p_\alpha, q_\beta$  ای وجود دارد به طوری که برای هر  $x$  در  $A$ ،  $q_\beta(\theta(x)) \leq p_\alpha(x)$ ، در این صورت  $\theta$  روی  $A$  پیوسته است.

فصل سوم مشتمل بر دو بخش است. در بخش اول نشان می دهیم که هرگاه  $(A, \{p_r\})$  یک جبر فرشه منظم جابه جایی باشد، به طوری که  $\pi_m^{-1}(\text{Rad } A_m) \subseteq \ker p_m$  آنگاه  $A/\ker p_m$  یک  $Q$ -جبر فرشه است، که  $A_m$  تکمیل شده  $A/\ker p_m$  تحت نرم  $p'_m$  است، که به ازای هر  $x \in A$  با ضابطه  $p'_m(x + \ker p_m) = p_m(x)$  تعریف می شود و در آن  $\pi_m : A \rightarrow A/\ker p_m \subseteq A_m$  نگاشت خارج قسمتی است.

در بخش دوم نشان خواهیم داد که هرگاه  $(A, \{p_r\})$  یک جبر فرشه منظم جابه جایی باشد به طوری که از مرتبه ای به بعد در شرط  $\pi_r^{-1}(\text{Rad } A_r) \subseteq \ker p_r$  صدق کند و  $(B, \{q_r\})$  یک جبر فرشه نیم ساده جابه جایی باشد، آنگاه هر  $n$ -همریختی  $T : A \rightarrow B$ ، که از مرتبه ای به بعد در شرط  $T(\ker p_r) \subseteq \ker q_r$  صدق کند، پیوسته است.

در فصل چهارم پیوستگی خودکار مدول همریختی ها بین جبرهای فرشه را مورد بررسی قرار خواهیم داد. در سال ۱۹۵۲ مایکل<sup>۲</sup> این سؤال را مطرح کرد که آیا هر تابع خطی ضربی روی یک جبر فرشه جابه جایی، به طور خودکار پیوسته است [۹]. این سؤال به مسئله مایکل مشهور شده است.

در سال ۲۰۰۱ لیونی<sup>۳</sup> در مقاله ای<sup>۴</sup> در بولتن بلژیک ثابت کرد که به مسئله مایکل پاسخ مثبت داده است. اما بعد از گذشت چند ماهی، اشکالی در برهان لیونی کشف شد و در نتیجه مسئله مایکل کماکان مسئله ای باز است.

در سال ۱۹۷۴ سینکلیر<sup>۱</sup> پیوستگی مدول همریختی ها روی جبرهای باناخ را مورد مطالعه قرار داد و نتایج جالبی به دست آورد، که در [۹] آمده است. ما به پیروی از کار ایشان پیوستگی مدول همریختی ها روی جبرهای فرشه را مورد مطالعه قرار داده ایم.

فصل چهارم مشتمل بر دو بخش است. در بخش اول برای جبر فرشه  $A$ ، چند نامساوی برای  $A$ -مدول همریختی ها از یک فرشه  $A$ -مدول به توی یک باناخ  $A$ -مدول ثابت می کنیم. در بخش دوم نشان خواهیم داد که اگر  $(A, \{p_n\})$  یک جبر فرشه یکدار با دونیم سازی مکرر یک  $(\{r_n\}, \{s_n\})$  و  $(X, \{q_n\})$  یک فرشه  $A$ -مدول باشد به طوری که برای یک زیر دنباله مانند  $\{k_n\} \in \mathbb{N}$ ،  $s_n X \not\subseteq \ker q_{k_n}$  و  $Y$  یک باناخ  $A$ -مدول باشد، آنگاه هر  $A$ -مدول همریختی از  $X$  به  $Y$  به طور خودکار پیوسته است. همچنین برای هر زیر مجموعه کراندار  $E$  از  $X$  و هر  $m \in \mathbb{N}$ ، ثابت  $M > 0$  وجود دارد به طوری که برای هر

$$\|s_n \theta(x)\| \leq M p_{k_n}(s_n)^2, n \in \mathbb{N} \text{ و } x \in E$$

در انتهای فصل چهارم نتیجه می‌گیریم که اگر  $(A, \{p_n\})$  یک جبر فرشه یکدار با دونیم سازی مکرر یکه  $(\{r_n\}, \{s_n\})$  باشد، آنگاه هر همریختی از  $A$  به توی یک جبر باناخ به طور خودکار پیوسته است و از آن نتیجه می‌گیریم که هر جبر فرشه یکدار با دونیم سازی مکرر یکه، پیوسته تابعی است. لذا توانسته‌ایم در حالت‌های خاصی به مسئله مایکل پاسخ مثبت دهیم.

## فهرست نمادها

؟؟.....	$A$ of Unitization	$A^+$
؟؟.....		$A^\#$
؟؟.....		$A_\alpha$
؟؟.....	$A$ مجموعه همه عناصر معکوس پذیر	$Inv A$
؟؟.....	$A$ مجموعه همه همريختي‌هاي ناصفر روی	$M_A$
؟؟.....	$A$ مجموعه همه عناصر معکوس پذیر	$q - Inv A$
؟؟.....	$A$ gchgcghf	$Rad(A)$
؟؟.....	$A$ of radical Strong	$\Re(A)$
؟؟.....	$\theta$ of space Separating	$\mathfrak{S}(\theta)$
؟؟.....	$A$ of homomorphisms complex of set The	$S_A$
؟؟.....	$a \in A$ of Spectrum	$sp_A(a)$
؟؟.....		$\mathcal{S}_A$
؟؟.....	$x$ of transform fand' Gel The	$\hat{x}$
؟؟.....	$x \in A$ for , $\hat{x}$ all of set The	$\hat{A}$
؟؟.....	$b$ and $a$ of Quasi-product	$a \diamond b$
؟؟.....	functional Minkowski	$\mu_u$
؟؟.....	$a \in A$ of radius Spectral	$\nu_A(a)$
؟؟.....	Norm	$\ \cdot\ $
؟؟.....		$\pi(a)$
؟؟.....		$\tau$
؟؟.....	#####	$A^\#$
؟؟.....		$A_\alpha$
؟؟.....	$A$ مجموعه همه عناصر معکوس پذیر	$Inv A$
؟؟.....	$A$ مجموعه همه همريختي‌هاي ناصفر روی	$M_A$
؟؟.....	$A$ مجموعه همه عناصر معکوس پذیر	$q - Inv A$

؟؟.....	$A$ of radical Jacobson	$Rad(A)$
؟؟.....	$A$ of radical Strong	$\mathfrak{R}(A)$
؟؟.....	$\theta$ of space Separating	$\mathfrak{S}(\theta)$
؟؟.....	$A$ of homomorphisms complex of set The	$S_A$
؟؟.....	$a \in A$ of Spectrum	$sp_A(a)$
؟؟.....		$S_A$
؟؟.....	$x$ of transform fand' Gel The	$\hat{x}$
؟؟.....	$x \in A$ for $\hat{x}$ all of set The	$\hat{A}$
؟؟.....	$b$ and $a$ of Quasi-product	$a \diamond b$
؟؟.....	functional Minkowski	$\mu_u$
؟؟.....	$a \in A$ of radius Spectral	$\nu_A(a)$
؟؟.....	Norm	$\ \cdot\ $
؟؟.....		$\pi(a)$
؟؟.....		$\tau$

# فصل ۱

## دستگاه اعداد مختلط

۱.۱ اعداد مختلط

۲.۱ مقدمات توپولوژیکی اعداد و صفحه مختلط

kjgvkjbnkjn۰۰۰۰ ۰۰۰۰۸۷۷۶۵۵۴۳۳۲



## فصل ۲

### توابع تحلیلی

۱.۲ حد و پیوستگی

## فصل ۳

### توابع مقدماتی

۱.۳ توابع نمایی و لگاریتمی

## فصل ۴

### تبدیلات

## فصل ۵

# انتگرال گیری در صفحه مختلط

در مسائل این فصل و فصل‌های بعدی همیشه جهت یک مسیر ساده بسته ، جهت مثبت است مگر خلاف آن بیان شود.

۱.۵ انتگرال توابع برداری از متغیر مختلط

۲.۵ مسیرها و انتگرال روی مسیرها

## فصل ۶

سری‌ها

## فصل ۷

### مانده‌ها و قطب‌ها

۱.۷ مانده توابع مختلط و قضیه مانده‌ی کوشی

## فصل ۸

### کاربردهای مانده‌ها

۱.۸ محاسبه انتگرال‌های ناسره

پیوست آ

## توپولوژی‌های روی فضاهای اندازه‌ها و ارزیابی‌ها

۱.آ توپولوژی مبهم روی فضای اندازه‌ها



پیوست **ب**

## توپولوژی‌های روی فضاهای اندازه‌ها و ارزیابی‌ها

ب.۱ توپولوژی مبهم روی فضای اندازه‌ها

پیوست پ

## توپولوژی‌های روی فضاها و ارزیابی‌ها

پ.۱ توپولوژی مبهم روی فضای اندازه‌ها

# مراجع

[] دانشجویان تحصیلات تکمیلی دانشگاه شهر کرد، در زیر نمونه‌ای از نحوه‌ی نوشتن مراجع آورده شده است. شما حتما حتما حتما باید به این صورت مراجع را بنویسید (به ترتیب حروف الفبای انگلیسی نام خانوادگی نویسندگان).

- [1] R. P. Agarwal, I. Kiguradze, On multi-point boundary value problems for linear ordinary differential equations with singularities, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 297 (2004) 131–151.
- [2] Z. J. Du, Solvability of functional differential equations with multi-point boundary value problems at resonance, *Computers and Mathematics with Applications* 55 (2008) 2653–2661.
- [3] W. Feng, J. R. L. Webb, Solvability of m-point boundary value problems with nonlinear growth, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 212 (1997) 467–480.
- [4] F. Z. Geng, Solving singular second order three-point boundary value problems using reproducing kernel Hilbert space method, *Applied Mathematics and Computation* 215 (2009) 2095–2102.
- [5] M. K. Kwong, The shooting method and multiple solutions of two/multi-point BVPs of second-order ODE, *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations* 6 (2006) 1–14.
- [6] Y. Z. Lin, J. N. Lin, Numerical algorithm about a class of linear nonlocal boundary value problems, *Applied Mathematics Letters* 23 (2010) 997–1002.
- [7] Y. Z. Lin, Minggen Cui, A numerical solution to nonlinear multi-point boundary value problems in the reproducing kernel space, *Mathematical Methods in the Applied Sciences* 34 (2011) 44–47.
- [8] M. Moshiinsky, Sobre los problemas de condiciones a la frontera en una dimension discontinuas, *Boletin De La Sociedad Matematica Mexicana* 7 (1950) 1–25.
- [9] M. R. Scott, W. H. Vandevender, A comparison of several invariant inbedding algorithms for the solution of two-point boundary value problems, *Applied Mathematics and Computation* 1 (1975) 187–218.
- [10] M. R. Scott, H. A. Watts, Computational solution of linear two-point boundary value problems via orthonormalization, *SIAM Journal on Numerical Analysis* 14 (1977) 40–70.
- [11] M. R. Scott, H. A. Watts, SUPORT-A Computer Code for Two-Point Boundary-Value Problems via Orthonormalization, SAND75-0198, Sandia Laboratories, Albuquerque, NM, 1975.
- [12] M. Tatari, M. Dehghan, The use of the Adomian decomposition method for solving multipoint boundary value problems, *Physica Scripta* 73 (2006) 672–676.
- [13] H. B. Thompson, C. Tisdell, Three-point boundary value problems for second-order ordinary differential equation, *Mathematical and Computer Modeling* 34 (2001) 311–318.
- [14] S. Timoshenko, *Theory of Elastic Stability*, McGraw-Hill, New York, 1961.
- [15] Q. Yao, Successive iteration and positive solution for nonlinear second-order three-point boundary value problems, *Computers and Mathematics with Applications* 50 (2005) 433–444.
- [16] Y. K. Zou, Q. W. Hu, R. Zhang, On the numerical studies of multi-point boundary value problem and its fold bifurcation, *Applied Mathematics and Computation* 185 (2007) 527–537.

- [الف] حمید شایان پور، مقدمه‌ای بر آنالیز ریاضی، انتشارات نشر دانشگاهی، ویرایش هفتم، ۱۳۹۰
- [ب] حمید شایان پور، مقدمه‌ای بر آنالیز ریاضی، انتشارات نشر دانشگاهی، ویرایش هفتم، ۱۳۹۰
- [پ] حمید شایان پور، مقدمه‌ای بر آنالیز ریاضی، انتشارات نشر دانشگاهی، ویرایش هفتم، ۱۳۹۰
- [ر] حمید شایان پور، مقدمه‌ای بر آنالیز ریاضی، انتشارات نشر دانشگاهی، ویرایش هفتم، ۱۳۹۰
- [ز] حمید شایان پور، مقدمه‌ای بر آنالیز ریاضی، انتشارات نشر دانشگاهی، ویرایش هفتم، ۱۳۹۰

# واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Probabilistic.....	احتمالی
Valuation.....	ارزیابی
Measure.....	اندازه
Stably.....	پایدار
Weak Topology.....	توپولوژی ضعیف
Powerdomain.....	دامنه‌توانی
Function Space.....	فضای تابع
Semantic Domain.....	دامنه معنایی
Program Fragment.....	قطعه برنامه
Dcpo.....	مجموعه جزئاً مرتب کامل جهت‌دار
Ordered.....	مرتب

# واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Dcpo.....	مجموعه جزئاً مرتب کامل جهت‌دار.....
Function Space .....	فضای تابع .....
Measure.....	اندازه .....
Ordered .....	مرتب .....
Powerdomain.....	دامنه‌توانی.....
Probabilistic.....	احتمالی.....
Program Fragment .....	قطعه برنامه .....
Semantic Domain .....	دامنه معنایی .....
Stably.....	پایدار.....
Valuation.....	ارزیابی.....
Weak Topology .....	توپولوژی ضعیف .....

# نمايه

الباياتب حميد حميد

احتمال، ۹

جبر، ۵

ضعيف\* - توپولوژی، ۲۰۵، ۲۰۸، ۲۱۱

ماهان شایان، ۲۰۵، ۲۰۸، ۲۱۱

# Abstract

A map  $\theta : A \rightarrow B$  between algebras  $A$  and  $B$  is called  $n$ -multiplicative if

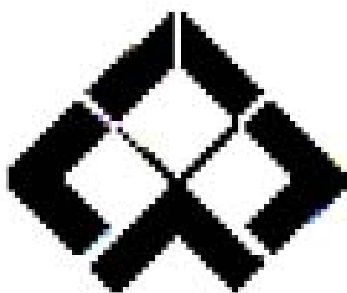
$$\theta(a_1 a_2 \cdots a_n) = \theta(a_1) \theta(a_2) \cdots \theta(a_n)$$

for all elements  $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ . If  $\theta$  is also linear then it is called an  $n$ -homomorphism. This notion is an extension of a homomorphism. We obtain some results on automatic continuity of  $n$ -homomorphisms between certain topological algebras, as well as Banach algebras. The main results are, extensions of Johnson's theorem for surjective  $n$ -homomorphisms, a theorem due to C. E. Rickart for dense range  $n$ -homomorphisms, and two theorems due to E. Park and J. Trout for  $*$ -preserving  $n$ -homomorphisms on  $lmc$   $*$ -algebras. Also, we show that for a commutative regular Fréchet algebra  $(A, \{p_r\})$ ,  $A/\ker p_m$  is a Fréchet  $Q$ -algebra if  $\pi_m^{-1}(\text{Rad} A_m) \subseteq \ker p_m$ , where  $A_m$  is the completion of  $A/\ker p_m$  with respect to the norm  $p'_m(x + \ker p_m) = p_m(x)$  ( $x \in A$ ) and  $\pi_m : A \rightarrow A_m$  is the natural projection,  $x \mapsto x + \ker p_m$ . Then we show that if  $(A, \{p_r\})$  is a commutative regular Fréchet algebra such that  $\pi_r^{-1}(\text{Rad} A_r) \subseteq \ker p_r$  for all large enough  $r \in \mathbb{N}$ ,  $(B, \{q_r\})$  is a commutative semisimple Fréchet algebra and  $T$  is an  $n$ -homomorphism from  $A$  into  $B$  such that  $T(\ker p_r) \subseteq \ker q_r$  for all large enough  $r \in \mathbb{N}$ , then  $T$  is continuous. Next, we study the automatic continuity of  $A$ -module homomorphisms from a Fréchet  $A$ -module into a Banach  $A$ -module, where  $A$  is a unital Fréchet algebra. Finally, we show that if  $A$  is a unital Fréchet algebra with a continued bisection of the identity and  $B$  is a Banach algebra, then every homomorphism  $\theta : A \rightarrow B$  is automatically continuous.

**2010 Mathematics Subject Classification :** Primary 46H40, 46H05; Secondary 46K05, 46J05.

**Keywords:** Automatic continuity,  $n$ -homomorphism, Topological algebras,  $lmc$  algebras,  $Q$ -algebras, Fréchet algebras, Regular Fréchet algebras, Semisimple, Strongly semisimple, Factorizable algebras, Module homomorphism,  $n$ -involution,  $lmc$   $*$ -algebras,  $*$ -preserving  $n$ -homomorphisms, Continued bisection of the identity, Fréchet  $A$ -module.





**Shahrekord University**  
**Faculty Of Mathematical Sciences**

**Pure Mathematics**  
**Mathematical Analysis**

**Title**

**Automatic Continuity of Homomorphisms and  
Module Homomorphisms on Banach Algebras  
and Topological Algebras**

**A thesis submitted in partial fulfilment of the  
requirements for the degree of Master of Science(MSc)**

**By**

**Hamid Shayanpour**

**Supervisor**

**Dr. Hamid Shayanpour**

**Advisors**

**Dr. Hamid Shayanpour and Dr. Hamid Shayanpour**

**August 2012**

